集合论知识总结

第一章 集合及其运算 2
§1 集合的基本概念 2
§2 子集、集合的相等 2
§3 集合的基本运算 2
§4 余集运算 3
§5 笛卡儿乘积 4
§6 有限集合的基数 4
第二章 映射 5
§1 函数的一般概念 5
§2 抽屉原理 6
§3 映射的一般性质 6
§4 映射的合成 7
§5 逆映射 7
§6 置　换 8
§7 二元和 n 元运算 9
§8 集合的特征函数 10
第三章 关 系 10
§1 关系的概念 10
§2 关系的性质 11
§3 关系的合成 12
§4 关系的闭包运算 12
§5 关系矩阵和关系图 13
§6 等价关系与划分 14
§7 映射按等价关系分解* 15
§8 偏序关系与偏序集 15
第四章 无穷集合及其基数 16
§1 可数集 16
§2 连续统集 17
§3 基数及其比较 18

第一章 集合及其运算

§1 集合的基本概念

一般地，把一些确定的，可以区分的事物放在一起组成一个整体称为集合，简称集。
集合的特点：1.任意性(不能说所有集合的集合)；2.不能重复；3.无序性；4.确定性。
三个原始概念：集合、元素、属于∈。
空集和全集：不含任何元素的集合称为空集，记为ϕ。符号化表示为：$\phi=\{x|x\neq x\}$
在给定的问题中，所考虑的所有事物的集合称为全集，记为S。符号化表示为：$S=\{x|x=x\}$
单元集：仅含有一个元素的集合称为单元集。
注意：{x} 与 x 的区别。 x——元素，{x} ——集合。

§2 子集、集合的相等

子集：设A,B是两个集合，若集合A中的每个元素都是B的元素，则称A是B的子集合简称子集，这时也说A包含在B里。A是B的子集记为$A\subseteq B$(或B包含着A)。

$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\in A，x\in B$。等价地有：$A\subseteq B\Leftrightarrow$不在B中的元素必不在A中。

集合不包含:若A不是B的子集，则记为$A\nsubseteq B$（A不包含在B里） $A\nsubseteq B\Leftrightarrow \exists x\in A，x\notin B$。
真包含：设A,B为两个集合，若$A\subseteq B$且$\exists x\in B$使得$x\notin A$，则称A是B的真子集，记为$A\subset B$。 $A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B$且$\exists x\in B$使$x\notin A$。集合真包含等价形式：$A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B$且$A\neq B$。
注意：“∈”与“⊆”的区别
集合相等：设A,B是两个集合，若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则称A与B相等。并记为A＝B。即

$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$且$B\subseteq A$。(证明题)

集合不相等：若集合A和集合B不相等，则记为$A\neq B$。即 $A\neq B\Leftrightarrow A\nsubseteq B$或$B\nsubseteq A$。
集族：以集合为元素的构成集合称为集族。
幂集：集合S的所有子集（**包括空集ϕ及S本身—易错**）形成的集族称为S的幂集，记为2^S或P(S)。 $2^S=\{A|A\subseteq S\}$
说明：
(1)S有n个元素，则S有2^n个子集。这就是为什么采用符号2^S的原因。
(2) **ϕ和$\{\phi\}$的区别与联系**
区别：ϕ—空集， $\{\phi\}$——一个集族，这个集族只有一个元素，就是空集ϕ，因此 $\phi\neq\{\phi\}$。
联系：$\phi\subseteq\{\phi\}$， $\phi\in\{\phi\}$。而$\forall A\neq\phi$，$A\in\{A\}$成立， $A\subseteq\{A\}$不成立。
性质：(1) 空集ϕ是任一集合的子集；
(2) 空集ϕ是唯一的。

§3 集合的基本运算

并运算：设A，B是任意两个集合，则由至少属于集合A与集合B之一的一切元素组成的集合，称为集合A与B的并集，记为$A\cup B$。
交运算：设A，B是任意两个集合，则由既属于A又属于B的一切元素组成的集合，称为集合A与集合B的交集，记为$A\cap B$ 。
差运算：设A，B是两个任意集合，则由属于A但不属B的一切元素组成的集合，称为A与

B 的差集，记为 A\B（或 A-B）。即 A\B={x|x∈A 但 x∉B}

<u>对称差</u>：设 A，B 是两个任意集合，则差集 A\B 与 B\A 的并集称为集合 A 与集合 B 的对称差，记为 AΔB。即 AΔB=(A\B)∪(B\A)

说明：

1. 当两个集合的交集为空集时，则称它们是不相交的；
2. 两两不相交：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个集合，若 $\forall A_i, A_j$ $(i \neq j)$ 有 $A_i \cap A_j = \emptyset$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两不相交的。
3. 两个集合并、交运算可以推广到多个集合上去。

设 $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ 是 n 个集合，则这 n 个集合的并运算和交运算可简单记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 和 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$。于是有：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n;\quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

当 n 无穷大时，可记为：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cdots;\quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cdots$$

性质（并、交运算以及它们之间的关系）：

定理 1.2 设 A,B,C 是三个任意集合，S 为全集，则

1. **交换律**成立，即 A∪B=B∪A、A∩B=B∩A、AΔB=BΔA
2. **结合律**成立，即 (A∪B)∪C=A∪(B∪C)、(A∩B)∩C=A∩(B∩C)、(AΔB)ΔC=AΔ(BΔC)
3. **幂等律**成立，即 A∪A=A、A∩A=A、AΔA=∅

注：差运算交换律、结合律、幂等律都不成立

4. ∅∪A=A、∅∩A=∅、AΔ∅=A， AΔS=S\A=A^C
5. S∪A=S、S∩A=A
6. A∪B=B⇔A⊆B、A∩B=A⇔A⊆B

基本运算间的关系(分配律和吸收律)

定理 3 设 A,B,C 是三个任意集合，则

1. A∪(B∩C)=(A∪B)∩(A∪C)	**2. A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C)**
<u>3. A∩(B\C)=(A∩B)\(A∩C)</u>	**<u>4. A∩(BΔC) =(A∩B)Δ(A∩C)</u>**
5. A∪(A∩B)=A	**6. A∩(A∪B)=A**
7. AΔ(AΔB)= B	**8. A\B=A\(A∩B)**
9. A\B=A∩B^C	
10. A\B=∅⇔A⊆B	**11. <u>(A\B)∪B=A</u>⇔<u>B⊆A</u>**

§4 余集运算

<u>余集</u>：设 S 是集合，A⊆S，则差集 S\A 称为集合 A 对集合 S 的余集，记为 A^C。即 A^C = S\A

并、交运算与余集的关系

设 A,B 是两个任意集合,则

1. $(A\cup B)^C = A^C \cap B^C$　　　　2. $(A\cap B)^C = A^C \cup B^C$

3. 若 $A\subseteq B$，则 $A^C\supseteq B^C$　　　　　　4. $(A^C)^C=A$

推广到多个集合：

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c,\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)^c=\bigcup_{i=1}^{n}A_i^c$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i^c,\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)^c=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i^c$$

文氏图（略）

对偶原理：若有关集合的并、交及余集运算的某一关系式成立，则将式中记号∪、∩、⊆、⊇：分别换成∩、∪、⊇、⊆，等号“=”不变，并将式中每一个集合换成它的余集。由此得到的新的关系式也一定成立。

§5 笛卡儿乘积

序对：两个对象 a 和 b（允许 a＝b）按着一定的次序排列的整体称为一个二元组或序对。

序对与集合的区别：

序对是由**有次序**的两个对象组成的，因此**序对与含有两个对象的集合有区别**。

笛卡儿乘积：

1. 设 A 与 B 为两个任意集合，集合 $\{(a,b)|a\in A，b\in B\}$ 为 A 与 B 的笛卡儿乘积，记为 $A\times B$。

2. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 $n(n\geqslant 3)$ 个集合，则集合 $\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡儿乘积，并记为 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$。于是 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$，当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 记为 A^n。

$A\times B=B\times A$ 充要条件是下列三个条件至少一个成立：（1）$A=\emptyset$；（2）$B=\emptyset$；（3）$A=B$。

笛卡儿乘积**一般不满足交换律；不满足封闭性；不满足结合律；**

若 A,B,C 都不是空集时，结合律不成立。即　$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$

若 A,B,C 中有一个是空集$\emptyset$时，则上式成立，即　$(A\times B)\times C=A\times(B\times C)=\emptyset$

性质(笛卡儿乘积运算与并、交、差运算的关系)

定理 1　设 A,B,C 是三个集合，则

（1）　$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$　　　（2）　$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

（3）　$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$　　　（4）　$A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C)$

定理 2　设 A,B,C 是三个集合，$C\neq\emptyset$，则 $A\subseteq B\Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times C$

定理 3　设 A,B,C,D 为集合，则 $A\times B\subseteq C\times D\Leftrightarrow A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$

n 元组：n 元组是 n 个对象按一定顺序排列组成的整体。若第 1 个分量为 x_1，第 2 个分量为 x_2,…,第 n 个分量为 x_n，则这个 n 元组就记为：$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

§6 有限集合的基数

一一对应：

1. 设 A 和 B 是两个有限集合,若存在一个法则φ使得$\forall x\in A$，根据法则φ在 B 中有唯一的 y 与 x 对应，这个 y 常记为$\varphi(x)$；而且,$\forall y\in B$，存在 A 中的唯一的 x，使得 x 在φ下对应于 y。这个法则φ称为从 A 到 B 的一个一一对应。

2. 设 A,B 是两个集合，若 $A\times B$ 的子集 f 满足下列条件：

　(1) $\forall x\in A$,存在唯一的 $y\in B$,使得 $(x,y)\in f$ $(f(x)=y)$；

　(2) $\forall y\in B$,存在唯一的 $x\in A$,使得 $(x,y)\in f$ $(f(x)=y)$。

则称 f 是集合 A 到 B 的一个一一对应。

有限集合及其基数：设 A 是一个集合,若 A=¢或 A≠¢且存在一个自然数 n,使得 A 与集合{1,2,…,n}间存在一个一一对应，则称集合 A 为有限集。数 n 称为集合 A 的基数，记为|A|

说明：1.空集¢的基数定义为数 0，即|¢|=0。

2.若 A 不是有限集合，则 A 为无限集合。

基数的比较：设 A,B 是两个集合，若 A 与 B 的一个真子集之间有一个一一对应，但 A 与 B 之间不存在一一对应，则称集合 A 的基数|A|小于集合 B 的基数|B|，记为 |A|<|B|。

集合基数的性质：

定理 1 设 A,B,C 是三个有限集合，则

（1）若 $A\cap B=\phi$，则 $|A\cup B|=|A|+|B|$；（2）若 $A\cap B\neq\phi$，则 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$；

（3）$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$；

（4）设 S 为有限集，$A\subseteq S$，则 $|A^c|=|S\setminus A|=|S|-|A|$；

（5）$|A\Delta B|=|A|+|B|-2|A\cap B|$（$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(B\cap A)$）；（6）$|2^A|=2^{|A|}$；（7）$|A\times B|=|A|\bullet|B|$；

推广：$|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=|A_1|\bullet|A_2|\bullet\cdots\bullet|A_n|$；

（8）$|A\cup B|\leqslant|A|+|B|$；（9）$|A\cap B|\leqslant\min(|A|,|B|)$；（10）$|A\setminus B|\geqslant|A|-|B|$。

逐步淘汰定理(容斥原理)

（1）设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个两两不相交的有限集合，则 $\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|$

（2）设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个有限集合，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

（2）设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为有限集合 S 的子集，则 $\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i^C\right|=|S|-\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|$

第二章 映射

§1 函数的一般概念

映射：

（1）设 X 和 Y 是两个非空集合，若根据某一法则 f，使得∀x∈X，都存在唯一的 y∈Y 与之对应，则称 f 为一个从 X 到 Y 的映射。

（2）设 X 和 Y 是两个非空集合。若 X×Y 的子集 f 满足下列条件：∀x∈X，都存在唯一的 y∈Y，使得(x,y)∈f[或 f(x)=y]，则称 f 是 X 到 Y 的映射。

定义域—X 称为 f 的定义域。x 对应元素 y 称为 x 在 f 下的象(或值)，记为 f(x)。 而 x 称为 y 的原象。

值域—集合{f(x)|x∈X}称为 f 的值域(或象集)，记为 $I_m(f)$。 即{f(x)|x∈X}=$I_m(f)$⊆Y。

记法—“f 是 X 到 Y 的映射”常记为：f:X→Y。

映射关系图（略）

特殊映射：

1.限制与扩张：设 f: X→Y，A⊆X，当把 f 的定义域限制在 A 上时，就得到了一个φ:A→Y，∀x∈A,φ(x)=f(x),则称φ为 f 在 A 上的限制。反过来，f 是φ在 X 上的扩张。

2.部分映射：设 f:A→Y ,A⊆X，则称 f 是 X 到 Y（或 X 上）的一个部分映射。假定空集¢到 Y 有一个唯一映射（空映射），它也是 X 到 Y 的部分映射。

3.映射的相等：设 f,g: X→Y，则

$f=g \Leftrightarrow \forall x\in X$，有 $f(x)=g(x)$　　　　　$f\neq g \Leftrightarrow \exists x\in X$，使得 $f(x)\neq g(x)$

4. **单射**：设 $f:X\to Y$，若 $\forall x_1, x_2\in X$，只要 $x_1\neq x_2$，就有 $f(x_1)\neq f(x_2)$。

5. **满射**：设 $f:X\to Y$，若 $\forall y\in Y$，$\exists x\in X$，使得 $f(x)=y$。

6. **双射**：设 $f:X\to Y$，若 f 既是满射又是单射，则称 f 为双射，或一一对应。这时也称 X 与 Y 对等，记 $X\sim Y$。

7. **恒等映射**：设 $f:X\to X$，若 $\forall x\in X$，$f(x)=x$，则称 f 为 X 上的恒等映射。X 上的恒等映射常记为 I_x 或 I。

设 $f:X\to X$ 为集合 X 到集合 X 的一一对应，使得 $f=f^{-1}$，则 f 是 X 到 X 的恒等映射（错）

重要结论：

定理 1 $f:A\to B$，设 A，B 是有限集合。则

（1）若 f 是单射，则 $|A|\le|B|$；（2）若 f 是满射，则 $|A|\ge|B|$；（3）若 f 是双射，则 $|A|=|B|$。

定理 2 设 $f:A\to B$，A，B 是有限集合且 $|A|=|B|$，则 f 是单射⇔f 是满射。

说明：(1) f 是单射也是满射，从而 f 是双射；

(2) 定理中 A，B 为有限集合是必要条件，若 A，B 不是有限集合，则结论不成立。

§2 抽屉原理

抽屉原理：n+1 个物体放到 n 个抽屉里，则一定存在某一抽屉里面至少有两个物体。

抽屉原理强形式：设 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 都是正整数，若把 $m_1+m_2+\cdots+m_n-n+1$ 个物体放到 n 个抽屉里，则或第一个抽屉里至少有 m_1 个物体，或第二个抽屉里至少有 m_2 个物体，…，或第 n 个抽屉里至少有 m_n 个物体。

说明：当 $m_1=m_2=\cdots=m_n=2$ 时，$m_1+m_2+\cdots+m_n-n+1=n+1$。抽屉原理是强形式的一种特殊情况。

推论 1：若有 m 个物体放到 n 个抽屉里，则一定存在某一个抽屉，它里面至少有 $[(m-1)/n]+1$ 个物体。

推论 2 若把 $n(m-1)+1$ 个物体放进 n 个抽屉，则一定存在一个抽屉，里面至少有 m 个物体此推论是强形式中，当 $m_1=m_2=\cdots=m_n=m$ 时的特殊情况。

推论 3 若 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 是 n 个正整数，且 $(m_1+m_2+\cdots+m_n)/n>r-1$，则 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 中　至少有一个大于或等于 r。

§3 映射的一般性质

象集（象）：设 $f:X\to Y$，$A\subseteq X$，由 f 和 A 可以唯一的确定 Y 中的一个子集，记为 $f(A)$，$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$。称 $f(A)$ 为集合 A 在 f 下的象集（象）。

说明：利用这种方法，由 f 可以确定一个从 2^X 到 2^Y 的映射，称为导出映射，仍记为 f。则有

(1) $f(\phi)=\phi$;

(2) $f(X)=I_m(f)=\{f(x)\mid x\in X\}\subseteq Y$;

(3) $f:X\to Y$，若 f 是满射，则 $f(X)=Y$;

(4) 若 $A\subseteq B\subseteq X$，则 $f(A)\subseteq f(B)$。

原象：设 $f:X\to Y$，$B\subseteq Y$，则由 f 和 B 可以唯一确定 X 上的一个子集，记为 $f^{-1}(B)$，$f^{-1}(B)=\{x\mid f(x)\in B, x\in X\}$ 称 $f^{-1}(B)$ 为在 f 下 B 的原象。$f^{-1}(B)$ 是 X 中在 f 下象落到 B 里的那些元素构成的集合。

性质：

定理 1 设 $f:X\to Y$，C，$D\subseteq Y$，则

(1) $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$
(2) $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$
(3) $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$
(4) $f^{-1}(C\Delta D)=f^{-1}(C)\Delta f^{-1}(D)$
(5) $f^{-1}(C^{C})=(f^{-1}(C))^{C}$

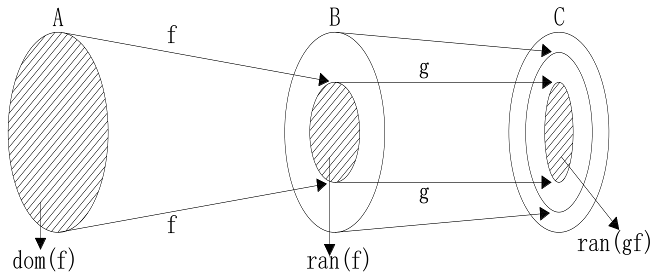
定理 2 设 f:X→Y，A，B⊆X，则

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$
(2) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$
(3) $f(A\Delta B)\supseteq f(A)\Delta f(B)$
(4) $f(A\setminus B)\supseteq f(A)\setminus f(B)$

注意，两个集合的交（差、对称差）的象不一定与它们的象的交（差、对称差）相重合。

§4 映射的合成

映射合成的定义：设 f:A→B，g:B→C。若存在一个从 A 到 C 的映射记为 h，并且∀x∈A，h(x)=g(f(x))，则称 h 为映射 f 与 g 的合成。h 记为 g∘f(gf)，即 h=g∘f=gf



性质：虽然交换律不成立，但却有结合律成立。
定理 1 设 f:X→Y，g:Y→Z，h:Z→W，则 h(gf)=(hg)f。
定理 2 设 f:X→Y,则 $fI_X=I_Yf=f$。
定理 3 设 f:X→Y,g:Y→Z，则
（1）若 f 与 g 都是单射，则 gf 也是单射；
（2）若 f 与 g 都是满射，则 gf 也是满射；
（3）若 f 与 g 都是双射，则 gf 也是双射。
定理 4 设 f:X→Y，g:Y→Z，则
（1）若 gf 是单射，则 f 是单射；
（2）若 gf 是满射，则 g 是满射；
（3）若 gf 是双射，则 f 是单射，g 是满射。
说明：gf 是单射时，f 是单射，但 g 不一定是单射；gf 是满射时，g 是满射，但 f 不一定是满射。

§5 逆映射

逆映射的定义：设 f:X→Y。若存在一个映射 g:Y→X,使得 **$gf=I_X$ 且 $fg=I_Y$**，则称映射 f 是可逆的，而 g 称为 f 的逆映射。由定义，f 可逆⇔**$gf=I_X$ 与 $fg=I_Y$ 同时成立，缺一不可。**
左逆与右逆映射：设 f:X→Y，则
(1)若存在一个映射 g:Y→X,使得 $gf=I_X$，则称 f 是左可逆的，g 称为 f 的左逆映射。

(2)若存在一个映射 $h:Y\to X$, 使得 $fh=I_Y$，则称 f 是右可逆的，而 h 称为 f 的右逆映射。

逆映射的性质：

定理 1 设 $f:X\to Y$，则 f 是可逆的⇔f 为双射。

定理 2 设 $f:X\to Y$，则若 f 是可逆的，那么 f 的**逆映射是唯一**的。f 逆记为 f^{-1}。

定理 3 设 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，若 f 和 g 都是可逆的，则 gf 也是可逆的且 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$，$(f^{-1})^{-1}=f$。公式 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$ 称为“**穿脱原则**”，脱的次序正好与穿的次序相反。

定理 4 设 $f:A\to B$，$A\neq\varnothing$，则

（1）f 是左可逆的，当且仅当 f 是单射；

（2）f 是右可逆的，当且仅当 f 是满射；

（3）f 既是左可逆的又是右可逆的⇔f 是双射；

（4）若 f 是双射，则 f 的左逆映射等于右逆映射。

§6 置　换

置换的定义：有限集合 S 到自身的一一对应称为 S 上的一个置换。若 $|S|=n$，则 S 上的置换称为 n 次置换。S 上的 n 次置换个数等于 n!。

n 阶有限群同构于 n 阶置换群；

n 阶置换群之间的代数运算就是置换的乘法运算。

置换的表示：用 1，2，…，n 表示 n 元集 S 的各元素。

设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，σ是 S 上置换，即$\sigma:S\to S$，σ是一一对应。

$\forall i\in S$ ，存在唯一 $k_i\in S$ 对应，即$\sigma(i)=k_i$。由于 S 只有 n 个元素，所以可把 S 的 n 个元素写在一行上，而把每个元素在σ下的象 k_i 写在这个元素的下面，就得到如下的一个表：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

说明：一个 n 次置换就是 S 中的元素的一个全排列。

置换的乘积（合成）

乘积的表示方法：α与β的乘积（合成）就可记为αβ，并且$\forall i\in S$ $(i)\alpha\beta=((i)\alpha)\beta$ ，或简记为$(i)\alpha\beta$。

几种特殊的置换：

1. S 上的恒等置换记为 I，即 $I=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$

2. 置换的逆置换：

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix},\sigma^{-1}=\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$\sigma\cdot\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\cdot\sigma=I$

即σ的逆σ^{-1}就是σ的表示式的上下两行交换后所得到的表达式。

3. **循环置换、对换**

定义 1 设σ是 S 上的一个 n 次置换，若 $i_1\sigma=i_2, i_2\sigma=i_3, \cdots, i_{k-1}\sigma=i_k, i_k\sigma=i_1$, 而$\forall i\in S\setminus\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$, $i\sigma=i$，则称σ是一个 k—循环置换，记为 $(i_1i_2\cdots i_k)$。即

$$(i_1,i_2,\cdots,i_k)=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{k-1} & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_k & i_1 & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

$(i_1 i_2 \cdots i_k)=(i_2 i_3 \cdots i_k i_1)=(i_3 i_4 \cdots i_k i_1 i_2)=\cdots=(i_k i_1 i_2 \cdots i_{k-1})$

当 k＝2 时，2－循环置换也称为对换,简记为(i, j)。如图：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

4. 循环置换的逆、对换的逆

循环置换的逆为:

$$(i_1,i_2,\cdots,i_k)=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{k-1} & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_k & i_1 & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(i_1,i_2,\cdots,i_k)^{-1}=\begin{pmatrix} i_2 & i_3 & \cdots & i_k & i_1 & i_{k+1} & \cdots & i_n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{k-1} & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}} \qquad =(i_k \quad i_{k-1} \quad \cdots \quad i_2 \quad i_1)$$

对换的逆就是其本身。

<u>循环置换的性质</u>：

映射的合成运算不满足交换律，故置换的乘积也不满足交换律。即$\forall\alpha,\beta\in S_n$，$\alpha\beta\neq\beta\alpha$。但对于两个没有共同数字的循环置换却是可交换的。

定义 1 设$(i_1 i_2 \cdots i_k)$与$(j_1 j_2 \cdots j_r)$是两个循环置换，若$(i_1 i_2 \cdots i_k)\cap(j_1 j_2 \cdots j_r)=\varnothing$，则称这两个循环置换是没有共同数字的循环置换（或称不相交）。

定义 2 若一个置换能被分解为偶数个对换的乘积，则称这个置换为偶置换。若一个置换能被分解奇数个对换的乘积，则称这个置换为奇置换。

1 个奇置换×1 个偶置换＝奇置换；1 个奇置换×1 个奇置换＝偶置换；

任意偶数个奇置换乘积是偶置换；

任意奇数个偶置换乘积是偶置换；　任意奇数个奇置换乘积是奇置换。

定理 1 设$\alpha=(i_1 i_2 \cdots i_k)$与$\beta=(j_1 j_2 \cdots j_r)$是两个没有共同数字的循环置换，则$\alpha$与$\beta$是可交换的，即$\alpha\beta=\beta\alpha$。

定理 2 结合律成立。

定理 3（置换的循环分解）每个置换都能分解成若干个没有共同数字的循环置换的乘积。若不计这些循环置换的顺序，则这种分解是唯一的。

定理 4 每个循环置换可被分解成若干个对换的乘积。

定理 5 每个置换能被分解成若干个对换的乘积。

定理 6 若把置换分解成若干个对换的乘积，则对换的个数的**奇偶性是不变的。**

§7 二元和 n 元运算

定义 1 设 X, Y, Z 为三个非空集合，$\varphi: X\times Y\to Z$。则称φ为 X 与 Y 到 Z 的一个二元运算。

当 X=Y=Z 时，即$\varphi: X\times X\to X$，则称φ为 X 上的二元(代数)运算。

定义 2 设 X, Y 是两个非空集合，$\varphi: X\to Y$。称φ为 X 到 Y 的一个一元运算。

当 X=Y, 即若$\varphi: X\to X$，则称φ为 X 上的一元运算。也称φ为 X 的一个变换。

定义 3 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, Y 为非空集合，

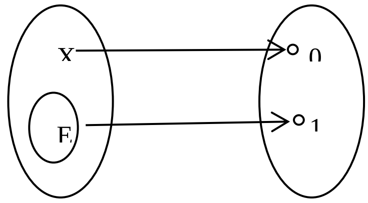
$\varphi: X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to Y$。则称$\varphi$为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 到 Y 的一个 n 元运算。

若 $X_1=X_2=\cdots=X_n=Y=X$，即$\varphi: X\times X\times\cdots\times X\to X$，则称$\varphi$为 X 上的 n 元运算。

§8 集合的特征函数

定义 1 设 X 是一个集合，E⊆X，φ_E:X→{0,1}。∀x∈X，

$$\varphi_E(x)=\begin{cases}1 & 若 x\in E\\ 0 & 若 x\notin E\end{cases}$$



则称φ为子集 E 的特征函数。

说明：

1.如图所示表示了这个映射的特征。

2.**特征函数是由 E 唯一确定的**，反过来，对任一特征函数都能唯一地确定一个 E。因此，集合 E 与它的特征函数是一一对应。

3.子集 E 与它的特征函数φ_E一一对应，而 X 共有$|2^X|$个子集，若用 Ch(X)={φ_E|φ_E:X→{0,1},E⊆X}表示时，则 Ch(X)也应该有$|2^X|$个，即 2^X~Ch(X)。

4.集合的特征函数是描述集合的另一种方法。

第三章 关系

§1 关系的概念

<u>二元关系</u>：

1.设 X，Y 是两个集合，一个从 X×Y 到{是,否}的映射 R，称为 X 到 Y 的一个二元关系或 X 与 Y 间的二元关系。(R:X×Y→{是,否})若 X＝Y，则称 R 为 X 上的二元关系。

对于(x,y)∈X×Y，在 R 下的象为“是”，则称 x 与 y 符合关系，记为:xRy 或(x,y)∈R。

对于(x,y)∈X×Y，在 R 下的象为“否”，则称 x 与 y 没有或不符合关系，记为:(x,y)∉R。

2.设 X，Y 是两个集合，X×Y 的任意子集 R 称为从 X 到 Y 的一个二元关系。(R⊆X×Y)若 X＝Y，则称 R 为 X 上的二元关系。(R⊆X×X)

说明：

(1) 由 2 可知,X×Y 的任一子集 R 都称为 X 到 Y 的 二元关系，共有 $2^{|X||Y|}$个二元关系。

(2)X×Y、φ⊆X×Y，称 X×Y 为 X 到 Y 的全关系，空集φ为 X 到 Y 的空关系。

<u>恒等关系</u>：集合{(x,x)|∀x∈X}称为 X 上的恒等关系，或相等关系。记为 I_X，即 I_X={(x,x)|∀x∈X}。

<u>定义域、值域</u>：设 R⊆X×Y，集合{x|x∈X 且∃y∈Y,使得(x,y)∈R},称为 R 的定义域，记为 dom(R)。集合{y|y∈Y 且∃x∈X，使得(x,y)∈R}称为 R 的值域，记为 ran(R)。

<u>逆关系</u>：设 R 是 X 上的一个二元关系，则 R 的逆关系 R^{-1}为：R^{-1}={(y,x) | (x,y)∈R}。

<u>关系图（略）</u>

<u>多值部分映射概念</u>：

1.设 X，Y 是集合，一个从 X 到 2^Y的映射 R 称为 X 到 Y 的一个多值部分映射，即 R:X→2^Y

2.一个从 X 到 Y 的多值部分映射 R 称为 X 到 Y 的一个二元关系。

<u>N 元关系</u>：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是 n 个集合，则 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$的子集 R 称为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$间的一个 n 元关系，每个 X_i称为 R 的一个属性。

§2 关系的性质

一、自反性、反自反性

定义 1 设 R 是 X 上的二元关系,若$\forall x\in X$，都有$(x,x)\in R$或 xRx，则称 R 为 X 上的自反的(二元关系）。　　R 是自反的$\Leftrightarrow I_X\subseteq R$

定义 2 设 R 是 X 上的二元关系，若$\forall x\in X$，都有$(x,x)\notin R$或　　，则称 R 为 X 上的反自反的。　　R 是反自反的$\Leftrightarrow R\cap I_X=\emptyset$

自反与反自反的关系

(1)自反的一定不是反自反的;(2)反自反的一定不是自反的;

(3)既不是自反的也不是反自反的。

二、对称性、反对称性

定义 3 设 R 为 X 上的二元关系，若$\forall x,y\in X$，只要 xRy,就有 yRx，则称 R 为 X 上的对称的。

R 对称的$\Leftrightarrow R=R^{-1}$

定义 4 设 R 是 X 上的二元关系，$\forall x,y\in X$，若 xRy 且 yRx，则 x＝y。称 R 为 X 上的反对称的。　R 反对称的$\Leftrightarrow$若 $x\neq y$，则 xRy 与 yRx 不能同时成立;R 反对称$\Leftrightarrow R\cap R^{-1}\subseteq I_X$。

对称与反对称的关系：

（1）对称不是反对称;（2）反对称不是对称。（3）可以同时成立;（4）可以同时不成立。

三、传递性

定理 5 设 R 是 X 上的二元关系，$\forall x,y,z\in X$，若 xRy 且 yRz，有 xRz，则称 R 为 X 上的传递的。　　R 是传递的$\Leftrightarrow R\cdot R=R^2\subseteq R$。

四、关系的运算

A. 关系的对称差、余集和笛卡儿乘积的运算

定义 1 设 R、S 都是 X 到 Y 的二元关系，则 $R\Delta S=(R\setminus S)\cup(S\setminus R)$

定义 2 设 R 是 X 到 Y 的二元关系，则 R 的余(关系)R^C为 $R^C=X\times Y\setminus R$

定义 3 设 R 是 X 到 Y 的二元关系，S 是 Z 到 W 的二元关系，则 $R\times S$ 为 X,Y,Z,W 间的一个四元关系。即 $R\times S=\{(x,y,z,w)\mid(x,y)\in R,(z,w)\in S\}$。

而不是 $R\times S=\{((x,y),(z,w))\mid(x,y)\in R,(z,w)\in S\}$。（仍然是一个二元关系）

B. 关系的并、交、差、逆运算（性质）

定理 1 设 R,S 是 X 上的二元关系，则

(1) 若 R,S 都是 X 上的自反关系，则 $R\cup S,R\cap S,R^{-1}$ 也是 X 上的自反关系。($R\setminus S$ 不是)

(2) 若 R,S 都是 X 上的反自反关系，则 $R\cup S$, $R\cap S$, $R\setminus S$, R^{-1} 也是 X 上反自反关系。

(3) 若 R,S 都是 X 上的对称关系，则 $R\cup S$，$R\cap S$，$R\setminus S$，R^{-1} 也是 X 上对称关系。

(4) 若 R,S 都是 X 上的反对称的关系，则 $R\cap S,R\setminus S,R^{-1}$ 也是 X 上反对称关系。($R\cup S$ 不是)

(5) 若 R,S 都是 X 上的传递关系，则 $R\cap S$，R^{-1} 也是 X 上的传递关系。 ($R\cup S$，$R\setminus S$ 不是)

定理 2 设 R，S 是 X 上的二元关系，则

(1)$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$;(2)$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$;(3)$(R\setminus S)^{-1}=R^{-1}\setminus S^{-1}$;

(4)若 $R\subseteq S$，则 $R^{-1}\subseteq S^{-1}$;(5)$(R^{-1})^{-1}=R$。

定理 3 设 R 是 X 上的二元关系，则

(1)R 是自反的$\Leftrightarrow I_X\subseteq R$; (2)R 是反自反的$\Leftrightarrow R\cap I_X=\emptyset$;

(3)R 是对称的$\Leftrightarrow R=R^{-1}$; (4)R 是反对称的$\Leftrightarrow R\cap R^{-1}\subseteq I_X$;

(5)R 是传递的$\Leftrightarrow R\cdot R=R^2\subseteq R$。

§3 关系的合成

关系合成的概念：设 R 是 X 到 Y，S 是 Y 到 Z 的二元关系。若存在一个从 X 到 Z 的二元关系，记为 $R \cdot S$，并且 $R \cdot S=\{(x,z)|(x,z)\in X\times Z$ 且 $\exists y\in Y$，使得 $(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in S\}$。则称 $R \cdot S$ 是 R 与 S 的合成。

注：关系的合成不满足交换律

关系的性质：

定理 1

设 R_1，R_2，R_3 分别是从 X 到 Y，Y 到 Z，Z 到 W 的二元关系，则 $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)=(R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$。

合成关系与并、交运算的关系（分配律）

定理 2

设 R_1 是 X 到 Y 的二元关系，R_2 和 R_3 是从 Y 到 Z 的二元关系，R_4 是从 Z 到 W 的二元关系，则

(1) $R_1 \cdot (R_2\cup R_3)=(R_1 \cdot R_2)\cup(R_1 \cdot R_3)$（强分配率） $(R_2\cup R_3) \cdot R_4=(R_2 \cdot R_4)\cup(R_3 \cdot R_4)$

(2) $R_1 \cdot (R_2\cap R_3)\subseteq(R_1 \cdot R_2)\cap(R_1 \cdot R_3)$（弱分配率） $(R_2\cap R_3) \cdot R_4\subseteq(R_2 \cdot R_4)\cap(R_3 \cdot R_4)$

(3)若 $R_2\subseteq R_3$，则 $R_1 \cdot R_2\subseteq R_1 \cdot R_3$ $(R_2 \cdot R_4\subseteq R_3 \cdot R_4)$

注意：$R_1 \cdot (R_2\backslash R_3)\neq(R_1 \cdot R_2)\backslash(R_1 \cdot R_3)$

定理 3 设 R，S 是 X 上的二元关系，则

(1) $(R \cdot S)^{-1}=S^{-1} \cdot R^{-1}$； (2) $R \cdot R^{-1}$ 是对称的。

定理 4 设 R 是 X 上的二元关系，则

(1) R 是传递的 $\Leftrightarrow R \cdot R\subseteq R$。 (2) R 是对称且传递的 $\Leftrightarrow R=R \cdot R^{-1}$。

定理 5 设 R，S 是 X 上的二元关系，若 R，S 都是自反的，则 $R \cdot S$ 是自反的；

幂运算：设 R 是集合 X 上的任意一个二元关系，今递归定义 R 的非负整数次幂如下：

$$R^0=I_X,\ R^1=R,\ R^2=R \cdot R,\ \cdots,\ R^{n+1}=R^n \cdot R。$$

对任意的非负整数 m,n 有：$R^m \cdot R^n=R^{m+n}$，$(R^m)^n=R^{mn}$

幂运算的性质：

定理 1 设 X 是一个有限集合，$|X|=n$，R 是 X 上的一个二元关系，则存在非负整数 s、t，使得 $R^s=R^t$，其中 $0\leqslant s<t\leqslant 2^{n^2}$。

定理 2 设 R 是 X 上的一个二元关系，若存在非负整数 s、t(s<t)，使得 $R^s=R^t$，则有

(1) $R^{s+k}=R^{t+k}$，k 为非负整数。

(2) $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，k 和 i 为非负整数，p＝t−s。

(3)令 $S=\{R^0,R^1,R^2,\cdots,R^{t-1}\}$，则 R 的各次幂均为 S 的元素，即对任意的非负整数 q 有 $R^q\in S$。

§4 关系的闭包运算

自反（对称或传递）闭包：设 R 是非空集合 X 上的一个二元关系，若存在一个关系 R′ 满足下列条件：

(1) R′ 是自反的（对称的或传递的）；

(2) $R\subseteq R'$；

(3) 对 X 上的任何包含 R 的自反的（对称或传递）关系 R″ 都有 $R'\subseteq R''$，则称 R′ 为关系 R 的自反（对称或传递）闭包。

R 的自反、对称和传递闭合分别记为：r(R)，s(R)，$t(R)=R^+$。

说明：由定义，R 的自反（对称或传递）闭包就是包含 R 的具有自反（对称或传递）性质的**最小关系。**

闭包的性质：

定理 1 设 R 是非空集合 X 上的一个二元关系，则

（1）R 是自反的⇔r(R)=R；

（2）R 是对称的⇔s(R)=R；

（3）R 是传递的⇔t(R)=R。

定理 2 设 R_1 和 R_2 是 X 上的两个二元关系且 $R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1)\subseteq r(R_2)$； (2) $s(R_1)\subseteq s(R_2)$； (3) $t(R_1)\subseteq t(R_2)$。

此定理说明关系之间的包含性质经过闭包运算以后仍然保持（**保序性**）。

定理 3 设 R_1、R_2 是 X 上的两个二元关系，则

(1) $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$

(2) $s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$

(3) $t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$

定理 4 设 R 是非空集合 X 上的二元关系，则

(1) $r(R)= R\cup I_X$。

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$。

(3) $R^+=t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\cdots$

定理 5 设 R 是 X 上的一个二元关系，$|X|=n$，则 $R^+=t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\cup R^n$。

闭包的合成运算:一个关系 R 的闭包仍然是一个关系，还可以再求它的闭包，这种运算称为闭包的合成运算。

定理 6 设 R 是非空集合 X 上的关系，则

（1）若 R 是自反的，则 s(R)和 t(R)也是自反的；

（2）若 R 是对称的，则 r(R)和 t(R)也是对称的；

（3）若 R 是传递的，则 r(R)是传递的。

定理 7 设 R 是非空集合 X 上的关系，则

(1) rs(R)=sr(R)； (2) rt(R)=tr(R)； (3) $st(R)\subseteq ts(R)$。

自反传递闭包：

设 R 是非空集合 X 上的关系，则 X 上包含 R 的所有自反传递关系的交称为 R 的自反传递闭包，记为：R*。

性质： 设 R 是非空集合 X 上的关系，则 $R^*=I_X\cup R^+=R^0\cup R^+ = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$

自反传递闭包 R*与传递闭包 R+的关系：

1. $R^*=I_X\cup R^+=R^0\cup R^+$；

2. $R^+=R\cdot R^*=R^*\cdot R$；

3. $(R^*)^*=R^*$。

4. $\phi^+=\phi$， $\phi^*=I_X$， φ是空关系；

5. $(R^+)^+=R^+$ 。

§5 关系矩阵和关系图

关系矩阵：设 X、Y 为有限集合,$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ ，则

(1) 若 R 是从 X 到 Y 的二元关系，则 m×n 矩阵 $B_R=B=(b_{ij})_{m\times n}$ 称为 X 到 Y 的二元关系 R 的关系矩阵。其中

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & 当(x_i,y_j)\in R\\ 0 & 当(x_i,y_j)\notin R\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n$$

性质：设 B 是关系 R 的关系矩阵，则

（1）R 是自反的⇔B 的对称线上的元素全为 1。

（2）R 是反自反的⇔B 对称线上的元素全为 0。

（3）R 是对称的⇔B 是对称的。

（4）R 是反对称的⇔若 $i\neq j$,则 b_{ij} 与 b_{ji} 不能同时为 1。［或 $b_{ij}+b_{ji}\leqslant 1$］

（5）R 是传递的⇔若 $b_{ij}=1$ 且 $b_{jk}=1$，则 $b_{ik}=1$。〔或 $B\cdot B\leqslant B$，即 $R\cdot R\subseteq R$〕

（6）R^{-1} 的关系矩阵为 B^T。

关系图（略）

闭包的运算[用矩阵方法计算闭包]：逻辑加、逻辑乘、布尔乘法。

R,S 是 X 上的关系，B_R,B_S 分别是 R,S 的关系矩阵，则 $R\cup S$，$R\cap S$，$R\cdot S$ 的关系矩阵分别为：

(1)$B_{R\cup S}= B_R\vee B_S$；——逻辑加

(2)$B_{R\cap S}= B_R\wedge B_S$；——逻辑乘

(3)$B_{R\cdot S}= B_R\cdot B_S$。——布尔乘法

R 是有限集 X 上的关系,$|X|=n$。B_R 是 R 的关系矩阵,则 r(R)，s(R)，R^+ 的关系矩阵分别为：

(1)$B_{r(R)}=B_R\vee B_I$； — $r(R)=R\cup I$

(2)$B_{s(R)}=B_R\vee B_R^T$； — $s(R)=R\cup R^{-1}$

(3)$B_{R^+} =B_R\vee B_R^2\vee\cdots\vee B_R^n$。— $R^+=t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$ 简化 $B^+ =B\vee B^{(2)}\vee\cdots\vee B^{(n)}$。

§6 等价关系与划分

等价关系：设 R 是非空集合 X 上的二元关系，若 R 同时具有以下三个性质：

(1)R 是自反的；(2)R 是对称的；(3)R 是传递的。则称 R 是 X 上的等价关系，记为“≌”。

R 是等价关系⇔$I_X\subseteq R$,$R=R^{-1}$,$R^2\subseteq R$

等价类：设 R 是非空集合 X 上的一个等价关系，$\forall x\in X$，令集合$[x]_R=\{y|y\in X$ 且 $(x,y)\in R\}$ 则称集合$[x]_R$ 为 x 关于等价关系 R 的等价类，简称 x 的等价类， $[x]_R$ 简记为$[x]$。

性质：设 R 是非空集合 X 上的等价关系，$\forall x,y\in X$，则

(1) $[x]\neq\phi$ 且$[x]\subseteq X$；　　(2) 若$(x,y)\in R$,则$[x]=[y]$；

(3) 若$(x,y)\notin R$, 则$[x]\cap[y]=\phi$；　(4) $\cup[x]=X$。

商集：设 R 是非空集合 X 上的一个等价关系，以 R 的不相交的等价类为元素构成的集合称为 X 在 R 下的商集，简称为 X 的商集，记为 X/R，即 $X/R=\{[x]|x\in X\}$。

划分：设 X 是非空集合，若 X 的一些非空子集形成的集族$\Pi=\{A_i\}_{i\in I}$满足下列条件：

（1）$\forall A_i,A_j\in\Pi$，若 $i\neq j$, 则 $A_i\cap A_j=\phi$；

（2）$\cup A_i=X$。

则称Π为 X 的一个划分，Π中元素 A_i 为Π的划分块。

说明：

1)集合 X 的商集是集合 X 的一个划分；(R 的所有等价类构成的集合是 X 的一个划分)

2)当划分块的块数有限时，将划分Π写成：$\Pi=\{A_1 ,A_2,\cdots,A_n\}$，n 为块数。对于有限集合来说，它的划分块数一定是有限的。

3)对无限集合划分块数不一定有限。

等价关系与划分之间的关系：

定理 1 设 R 是非空集合 X 上的一个等价关系，则 X 的商集 X/R 就是 X 的划分。

这个划分称由等价关系 R 诱导出的 X 的划分，记为Π_R。

定理 2 设Π是非空集合 X 上的一个划分，令 X 上的关系 R_Π 如下： $R_\Pi=\{(x,y)|x,y\in X$ 且 x 和 y 属于Π的同一个划分块$\}$,则 R_Π 为 X 上的等价关系。并且Π就是 R 的所有等价类集合，

即 $R_{\Pi}=\cup A_i \times A_i$，$A_i \in \Pi$。
这个等价关系称为由划分Π诱导出的 X 上的等价关系。
定理 3 对非空集合 X 上的一个划分Π和 X 上的一个等价关系 R，有:Π诱导 R⇔R 诱导Π。
对上述三个定理的说明：
1. 集合 X 上的任一等价关系可以唯一地诱导出 X 上的一个划分；
2. 集合 X 上的任一划分可以唯一地诱导出 X 上的一个等价关系。
3. 集合 X 上的划分Π和 X 上的等价关系 R 之间可以建立一一对应关系。

在 X 上给出的一个划分与给出的一个等价关系是没有什么实质区别的。
等价闭包 e(R)：设 R 是 X 上的一个二元关系，则

$$e(R)=(R\cup R^{-1})^{*}=(R\cup R^{-1})^{0}\cup(R\cup R^{-1})^{+}=I_X\cup(R\cup R^{-1})^{+}。$$

等价关系的性质：
定理 1 设 R,S 是 X 上的等价关系，则 $R\cdot S$ 是等价关系⇔$R\cdot S=S\cdot R$。
定理 2(定理 1 的条件减弱)设 R,S 是 X 上的等价关系，则 $R\cdot S$ 是等价关系⇔ $R\cdot S\subseteq S\cdot R$。
定理 3 设 R,S 是 X 上的等价关系，若 $R\cdot S$ 是等价关系，则$(R\cup S)^{+}= R\cdot S$。

§7 映射按等价关系分解*

导出关系：设 $f:X\to Y$，在 X 上定义关系 E_f 如下：$\forall a,b\in X, aE_fb \Leftrightarrow f(a)=f(b)$，称 E_f 为由 f 导出的关系。
说明：1. 由定义知：E_f 是自反、对称、传递的，故 E_f 是一个等价关系。
2. f 导出的等价关系为 f 的核。f 的核记为 Ker(f)，则 $X/Ker(f)=\{f^{-1}(y)\,|\,y\in Y, f^{-1}(y)\neq\phi\}$。

$$X/Ker(f)=\{f^{-1}(y)\,|\,y\in Y, f(x)=y\}。$$

自然映射：设 R 是 X 上的一个等价关系，$r:X\to X/R$，其定义为：$\forall a\in X, r(a)=[a]$ 。其中[a]为 a 关于 R 的等价类，映射 r 称为 X 到商集 X/R 的自然映射。
显然，X 到 X/R 的自然映射是满射。
性质：
定理 1 设 $f:X\to Y$，则 f 可分解为 X 到 X/Ker(f)的自然映射 r 与 X/Ker(f)到 Y 的某个单射 f_1 的合成，即 $f=f_1\cdot r$。
推论：f_1 是一一对应当且仅当 f 是满射。
定理 2 定理 1 中的单射 f_1 是唯一的。
说明：1. 由定理 1 知，一个映射 $f:X\to Y$ 通过等价关系 ker(f)被分解成两个“规格化”了的映射的合成。

§8 偏序关系与偏序集

偏序关系：设 R 是非空集合 X 上的一个二元关系，若 R 同时具有以下三个性质：
(1)R 是自反的；(2)R 是反对称的；(3)R 是传递的。
则称 R 是 X 上的偏序关系，简称偏序，记为“≤”。
偏序集：设≤的集合 X 上的一个偏序关系，集合 X 对偏序关系≤形成一个二元组，记为(X,≤)，称(X,≤)为偏序集。
集合 X 与偏序集(X,≤)的区别？
Hasse 图（略）
最大(小)元素、极大(小)元：设(A,≤)是一个偏序集，B⊆A，则
(1)若∃a∈B,使得∀x∈B，均有 x≤a，则称 a 为 B 的　 最大元素。

(2)若∃a∈B,使得∀x∈B，均有 a≤x，则称 a 为 B 的　最小元素。
(3) ∃a∈B，若 B 中没有任何元素 x，满足 a≠x 且 a≤x，则称 a 为 B 的极大元。
(4) ∃a∈B，若 B 中没有任何元素 x，满足 a≠x 且 x≤a，则称 a 为 B 的极小元。
说明：
1.最大(小)元不一定存在，若存在必唯一。
2.在非空集合中,极大(小)元必存在,但不一定唯一。
上(下)界、上(下)确界：设(A,≤)是一个偏序集，B⊆A，则
(1)若存在 a∈A，使得∀x∈B，均有 x≤a，则称 a 为 B 的上界;
(2)若存在 a∈A，使得∀x∈B，均有 a≤x，则称 a 为 B 的下界;
(3)若 B 的一切上界元素形成的集合中有最小元素，则称此最小上界为 B 的上确界 sup(B);
(4)若 B 的一切下界元素形成的集合中有最大元素，则称此最大下界为 B 的下确界 inf(B)。
说明：
1.B 的上(下)界和上(下)确界可能在 B 中,可能不在 B 中,但一定在 A 中。
2.上(下)界不一定存在，若存在不一定唯一。
3.上(下)确界不一定存在，若存在必唯一。
全序关系与全序集：设(X,≤)是偏序集，若∀x,y∈X，x≤y 与 y≤x 至少有一个成立，则称偏序关系“≤”为 X 上的全序关系，或称为线性序关系。
具有全序关系的集合 X 称为全序集或线性序集，记为(X,≤)。
说明：偏序集与全序集的主要区别就在于：全序集中任意两个元素均可以比较“大小”，而在偏序集中，则未必能比较“大小”。
链与反链：设(X,≤)是一个偏序集，B⊆X，则
(1)若∀x,y∈B，x≤y 与 y≤x 必有一个成立，则称 B 为 X 的一个链，B 中元素的个数称为链的长度。
(2)若∀x,y∈B，x≤y 与 y≤x 均不成立，则称 B 为 X 的一个反链，B 中元素的个数称为反链的长度。
偏序集的分解定理：设(X,≤)是一个偏序集，若 X 中最长链的长度为 n，则 X 的全部元素可以被分成 n 个互不相交的反链的并。
推论： 设(X,≤)是一个偏序集,|X|=mn+1,则 X 中或存在一条长至少为 m+1 的反链，或存在一条长至少为 n+1 的链。

第四章 无穷集合及其基数

§1 可数集

对等：设 X,Y 是两个集合，若 X 与 Y 之间存在一个一一对应，称 X 与 Y 对等，记为 X～Y。
“～”这是一个关系，而且是一个等价关系，于是就可以把集合分成几类。
可数集概念：
定义 1 凡与自然数集合 N={1,2,⋯,n,⋯}对等的集合都称为无穷可数集合，简称可数(或可列集、可列)。
定义 2 (等价)若从自然数集 N 到集合 X 存在一个一一对应 f:N→X，则称集合 X 是无穷可数集合，或可数。
至多可数概念：若 X 有限或可数，则称 X 至多可数。若 X 不是可数集且也不是有限集，则称 X 为不可数的无穷集，或不可数集。

说明：(1)有限集合既不是可数集也不是不可数集

(2)可数与不可数只是对无穷集合而言的。

性质：

定理 1 集合 A 为可数集的充分必要条件是 A 中的全部元素可以排成没有重复项的无穷序列：

a_1，a_2，…，a_n，…。

定理 2 无穷集 A 必包含有可数子集。

定理 3 可数集的任一无限子集也是可数的。

推论 1 从可数集 A 中除去一个有限集 M，则 A\M 仍是可数集。

定理 4 设 A 是可数集，M 是有限集，则 A∪M 是可数集。

定理 5 两个可数集的并仍然是可数集。

推论 2 有限个可数集之并仍然是可数的。

推论 3 可数个有限集之并至多可数。

推论 4 可数个可数集之并仍然是可数集。

定理 6 全体有理数之集 Q 是可数集。

推论 5 区间[0,1]中的一切有理数之集是可数集。

定理 7 设 A 和 B 是可数集，则 A×B 也是可数集合。

推论 6 设 N 是自然数集合，则 N×N 是可数集。

推论 7 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant2)$都是可数集，则 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 也是可数集。

无穷集合：

定理 1 设 M 是一个无穷集，A 是有限或可数集，则 M～M∪A。

推论：设 M 是一个无穷不可数集，A 是 M 的至多可数子集，则 M～M\A。

说明：

1. **定理可改为:M 是无穷集且 M\A 也是无穷集。**
2. **凡能与自身的一个真子集对等的集合称为无穷集合(无穷集)——无穷集合的本质。**

§2 连续统集

不可数集的存在：区间[0,1]中的所有实数构成的集合是不可数无穷集合。

证明：Cantor 的对角线法

连续统：凡与[0,1]对等的集合称为具有“连续统的势”的集合，简称连续统。

推论：

(1) [a,b) ～(a,b] ～(a,b) ～[0,1]；　(2) [0,1) ～(0,1] ～(0,1) ～[0,1]；

(3) 实数集合 R 是一个连续统。　(4) 全体无理数集合是一个连续统集。

连续统的性质：

定理 2 设 $A_1,A2,\cdots,A_n$是 n 个两两不相交的连续统，则 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$是连续统，即$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$～[0,1]。

定理 3 设 $A_1,A2,\cdots,A_n\cdots$为两两不相交的集序列。若 A_i～[0,1],i=1,2,3, …，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\sim[0,1]$$

推论：全体实数之集 R 是一个连续统。

$$R=\bigcup_{-\infty}^{\infty}[n-1,n]=\bigcup_{n=0}^{\infty}[n,n+1]\cup\bigcup_{n=0}^{\infty}[-(n+1),-n]\sim[0,1]$$

定理 4 令 B 为所有的 0,1 无穷序列所构成的集合，则 B～[0,1]。

定理 5 令 S={f|f:N→{0,1}},则 S～[0,1]。于是有，若 A 是可数的，则 2^A～[0,1]。

定理 6 设 A_1, A_2 均为连续统，则 $A_1 \times A_2 \sim [0,1]$。
推论 5 若 A1=A2=R，则 $A_1 \times A_2$ 就是平面上的所有点的集合。
推论 6 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 均为连续统，则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \sim [0,1]$。
推论 7 设 $I \sim [0,1]$，并且 $\forall i \in I$，$A_i \sim [0,1]$，则 $\bigcup_{i \in I} A_i \sim [0,1]$。
连续统个连续统之并仍然是连续统。

§3 基数及其比较

<u>无穷集合的基数</u>：
定义 1 集合 A 的基数是一个<u>符号</u>，凡与 A 对等的每个集，对应着同一个符号。
定义 2(等价定义) 所有与集合 A 对等的集形成的集族（的共性）为集合 A 的基数，记为 $|A|$
基数的相等：集合 A 与集合 B 的基数相等⇔ A～B。
<u>**无穷集合基数的比较**</u>：
定义 1 设 A、B 为任意两个集合，则
(1) 若存在从 A 到 B 的单射，则称 A 的基数小于或等于 B 的基数，记为 $|A| \leqslant |B|$；
(2) 若存在从 A 到 B 的单射，但不存在一一对应，则称 A 的基数小于 B 的基数，记为 $|A| < |B|$。这个定义是比较两个有限集合元素个数多少概念的推广。
定理 1 设 A,B,C 是三个任意的集合，则
(1)若 $A \subseteq B$，则 $|A| \leqslant |B|$ ；
(2)若 $|A| \leqslant |B|$，$|B| \leqslant |C|$，则 $|A| \leqslant |C|$；
推论：设 A 是无穷集合，则 $|N| \leqslant |A|$。
定理 2 (Zermelo)设 A,B 是两个任意集合，则 $|A|=|B|$，$|A|>|B|$，$|A|<|B|$,三者中恰有一个成立。这种性质称为三歧性，定理称为三歧性定理。
定理 3 (Bernstein) 设 A,B 是任意两个集合，若 $|A| \leqslant |B|$ 且 $|B| \leqslant |A|$，则 $|A|=|B|$。
定理 4（Cantor）设 A 是任意一个集合，则 $|A| < |2^A|$。**于是，不存在最大的集合。**